Die

cyclischen Curven

als Einhüllungscurven eines beweglichen Kreises.

Inaugural-Dissertation

der

hohen philosophischen Facultät

der Universität Marburg

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Otto Wetzell

aus Cassel.

Cassel.

Druck von L. Döll.

1880.

§. 1.

Wenn auf einer festen ebenen Curve eine bewegliche Curve in der Weise rollt, dass kein Gleiten stattfindet, so beschreibt ein mit der rollenden Curve fest verbundener Punkt in der Ebene derselben eine neue Linie, welche man allgemein als Rollcurve bezeichnet.

Die genannte Bewegung gewinnt an Anschaulichkeit, wenn man sich beide Curven, die ruhende sowohl als die rollende, zuerst als Polygone vorstellt, deren Seiten der Reihe nach mit einander übereinstimmen (Fig. 1.)

Liegen dieselben im Anfang der Bewegung mit der gemeinschaftlichen Seite AB aufeinander, so findet bei dem Rollen in der durch den Pfeil bezeichneten Richtung eine Drehung des rollenden Polygons um den Punkt B statt. Der mit demselben fest verbundene Punkt P beschreibt dabei den Kreisbogen PP', welcher B zum Mittelpunkt und die Entfernung BP zum Radius hat.

Die ganze rollende Bewegung setzt sich aus solchen Drehungen um die Ecken des ruhenden Polygons zusammen und die entstehende Rollcurve besteht aus einer zusammenhängenden Folge von Kreisbögen, welche die aufeinanderfolgenden Ecken des ruhenden Polygons zu Mittelpunkten und die Entfernungen derselben von dem beschreibenden Punkt zu Radien haben.

Werden die Seiten der Polygone unendlich klein, diese also zu Curven, so rücken die Centren der Kreisbögen, welche die Rollcurve bilden, unendlich nah zusammen, ihre Radien ändern sich kontinuierlich und die aufeinanderfolgenden Kreisbögen selbst werden unendlich klein.

Die Rollcurve wird dadurch zur Einhüllenden jener Kreisbögen, deren Mittelpunkte die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte der ruhenden und der rollenden Curve sind.

Diese Betrachtung gilt, auf welcher Seite der festen Curve die rollende sich auch bewegen möge, und es ist klar, dass auch die Länge des Radius, welcher zu einem bestimmten Punkt der ruhenden Curve gehört, unabhängig davon ist, auf welcher Seite die Bewegung stattfindet.

Denn dieser Radius hängt nur ab von der unveränderlichen Lage des beschreibenden Punktes zu der rollenden Curve und der Länge des Bogens, um welchen diese auf der ruhenden Curve fortgerollt ist. Diese Länge ist aber, entsprechende Anfangslage und gleiche Richtung der fortschreitenden Bewegung vorausgesetzt, dieselbe, mag die bewegliche Curve auf der einen oder der anderen Seite der festen rollen.

Die durch diese doppelte Bewegung entstandenen Rollcurven, welche wir als äussere und innere unterscheiden wollen, sind somit die Einhüllenden von Kreisbögen, von welchen je ein der äusseren Curve angehöriger mit einem Bogen der inneren Curve zu demselben Kreis gehört.

Es folgt daraus, dass beide Rollcurven zusammen die Einhüllende der Kreise bilden, deren Mittelpunkte

die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte der ruhenden und rollenden Curve und deren Radien die jedesmaligen Entfernungen dieser Punkte von dem beschreibenden Punkt sind.

Es wird die Aufgabe dieser Arbeit sein, diese Eigenschaft an den durch das Rollen eines Kreises auf einem anderen Kreis oder einer Graden erzeugten cyclischen Curven im einzelnen nachzuweisen und einige Fälle aufzusuchen, in welchen dieselbe zu einfachen Konstruktionen dieser Curven führt.

Vorher ist jedoch eine allen Rollcurven gemeinschaftliche Eigenschaft zu erwähnen, welche sich unmittelbar aus der soeben abgeleiteten ergiebt.

Aus dem Begriff der Einhüllenden folgt, dass die Rollcurve alle oben bezeichneten Kreise in ihren aufeinanderfolgenden Schnittpunkten berührt. Sie hat also in diesen Punkten mit jenen Kreisen gemeinschaftliche Tangenten und Normalen. Die Normalen der Kreise gehen aber durch ihre Mittelpunkte, d. h. durch die aufeinanderfolgenden Berührungspunkte der ruhenden und der rollenden Curve. Somit müssen auch die Normalen der Rollcurve durch die entsprechenden Berührungspunkte gehen.

§. 2.

Auf der Aussenseite eines festen, mit dem Radius $OA = R$ beschriebenen Kreises (Fig. 2.) rolle ein mit dem Halbmesser $CB = r$ konstruierter Kreis. Irgend ein mit dem letzteren fest verbundener Punkt P, welcher sich in der Entfernung ϱ von dem Mittelpunkt desselben befindet, beschreibt dann eine Epicycloide, welche als

verschlungene, gemeine oder gedehnte bezeichnet wird, jenachdem $\varrho \gtreqless r$ ist.

Denken wir uns den Anfang der Bewegung so, dass der beschreibende Punkt P in die Centrale OA beider Kreise fällt, so ist, wenn B den Berührungspunkt für irgend eine spätere Lage des rollenden Kreises bezeichnet, beständig $arc\ AB = arc\ BD$.

Wählt man O zum Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, OA zur Ordinatenachse und setzt den Wälzungswinkel $DCB = w$, so finden sich, da $\sphericalangle AOB = \frac{r}{R} w$ und $\sphericalangle PCE = \frac{R + r}{R} . w$ ist, für die Coordinaten des Punktes P die Werte:

$$X = (R + r) \sin \frac{r}{R} . w - \varrho \sin \frac{R + r}{R} . w.$$

$$Y = (R + r) \cos \frac{r}{R} . w - \varrho \cos \frac{R + r}{R} . w.$$

Dieser Punkt P lässt sich nun auch auffassen als der Durchschnittspunkt eines mit dem Radius BP um den Punkt B beschriebenen Kreises mit dem entsprechenden unendlich nahen Kreis.

Für die Länge BP ergiebt sich aus dem Dreieck BCP die Beziehung:

$$BP^2 = r^2 + \varrho^2 - 2 r\varrho \cos w.$$

Der mit BP um B beschriebene Kreis hat somit die Gleichung:

$$(x - R \sin \frac{r}{R} w)^2 + (y - R \cos \frac{r}{R} w)^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r \varrho \cos w.$$

oder:

$$x^2 + y^2 + R^2 - 2 Rx \sin \frac{r}{R} w - 2 Ry \cos \frac{r}{R} w = r^2 + \varrho^2 - 2 r\varrho \cos w,$$

deren erster Differentialquotient nach w:

$$y \sin \frac{r}{R} w - x \cos \frac{r}{R} w = \varrho \sin w \text{ ist.}$$

Die Coordinaten der Durchschnittspunkte des obigen Kreises mit dem unendlich nahen sind die Werte von x und y, welche diesen beiden Gleichungen genügen. Durch Auflösung derselben findet sich ohne Schwierigkeit:

$$x_1 = R \sin \frac{r}{R} w - \varrho \sin w \cos \frac{r}{R} w - \varrho \cos w \sin \frac{r}{R} w + r \sin \frac{r}{R} w.$$

$$y_1 = R \cos \frac{r}{R} w + \varrho \sin w \sin \frac{r}{R} w - \varrho \cos w \cos \frac{r}{R} w + r \cos \frac{r}{R} w.$$

$$x_2 = R \sin \frac{r}{R} w - \varrho \sin w \cos \frac{r}{R} w + \varrho \cos w \sin \frac{r}{R} w - r \sin \frac{r}{R} w.$$

$$y_2 = R \cos \frac{r}{R} w + \varrho \sin w \sin \frac{r}{R} w + \varrho \cos w \cos \frac{r}{R} w - r \cos \frac{r}{R} w,$$

welche Ausdrücke sich auch in der Form:

$$x_1 = (R + r) \sin \frac{r}{R} w - \varrho \sin \frac{R + r}{R} w.$$

$$y_1 = (R + r) \cos \frac{r}{R} w - \varrho \cos \frac{R + r}{R} w.$$

$$x_2 = (R - r) \sin \frac{r}{R} w - \varrho \sin \frac{R - r}{R} w.$$

$$y_2 = (R - r) \cos \frac{r}{R} w + \varrho \cos \frac{R - r}{R} w.$$

schreiben lassen.

Die Werte x_1 und y_1 sind identisch mit den früher für die Coordinaten des Punktes P angegebenen, der Punkt P und der Punkt $(x_1\ y_1)$ fallen somit zusammen. Da nun der Durchschnittspunkt $x_1\ y_1$ zweier unendlich nahen Kreise der angegebenen Art, wenn man sich denselben fortschreitend denkt, die Einhüllende jener Kreise beschreibt, der Punkt P aber die Epicycloide, so haben wir nachgewiesen, dass diese die Einhüllende einer Schar von Kreisen ist, deren Mittelpunkte auf dem ruhenden Kreis liegen und deren Radien durch die Gleichung $a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos w$ bestimmt werden.

Zwei unendlich nahe Kreise schneiden sich aber nicht nur in dem einen Punkt $x_1\ y_1$, welchen wir als der Epicycloide angehörend kennen gelernt haben, sondern noch in einem zweiten, für dessen Coordinaten wir die Werte x_2 und y_2 fanden.

Der Punkt $x_2\ y_2$ gehört der Hypocycloide an, welche von dem Punkt P beschrieben wird, wenn der bewegliche Kreis mit dem Radius r auf der Innenseite des festen Kreises mit dem Radius R in der Weise rollt, dass im Anfang der Bewegung der beschreibende Punkt P wieder in die Centrale OA beider Kreise fällt und die Richtung der fortschreitenden Bewegung des rollenden Kreises dieselbe ist wie früher. (Fig. 3.)

Denn bezeichnet wieder $w = \sphericalangle DCB$ den Wälzungswinkel des rollenden Kreises, so sind, weil $\sphericalangle AOB = \frac{r}{R} w$ und $\sphericalangle PCE = \frac{R - r}{R} w$ ist, die Coordinaten des Punktes P:

$$x = (R - r) \sin \frac{r}{R} w - \varrho \sin \frac{R - r}{R} w.$$

$$y = (R - r) \cos \frac{r}{R} w + \varrho \cos \frac{R - r}{R} w,$$

welche sich aus den Coordinatenwerten des Punktes der Epicycloide auch dadurch ableiten lassen, dass man in diesen dem Radius r und dem Wälzungswinkel w das negative Vorzeichen giebt, weil diese Grössen gegen dort entgegengesetzte Lage resp. entgegengesetzte Drehrichtung haben.

Die Werte von x und y stimmen überein mit denjenigen von x_1 und y_1, der die Hypocycloide beschreibende Punkt P fällt also zusammen mit dem Punkt x_1 y_1 und die Hypocycloide selbst bildet einen Teil der Einhüllenden der früher charakterisierten Kreise.

Wir gelangen somit zu dem folgenden, die bisher gefundenen Resultate zusammenfassenden Satz, in welchem wir als „zusammengehörige“ Epicycloiden und Hypocycloiden solche bezeichnen, welche ein mit dem Kreis mit dem Radius r fest verbundener, in der Entfernung ϱ von dem Mittelpunkt derselben befindlicher Punkt P beschreibt, wenn dieser Kreis einmal auf der Aussenseite und einmal auf der Innenseite eines festen Kreises mit dem Radius R so rollt, dass in beiden Fällen im Anfang der Bewegung der beschreibende Punkt P in dieselbe Centrale OA beider Kreise fällt und die Richtung der fortschreitenden Bewegung des rollenden Kreises dieselbe ist.

Die zusammengehörige Epicycloide und Hypocycloide bilden die Einhüllende der Kreise, deren Mittelpunkte auf dem ruhenden Kreis liegen und deren Radien durch die Gleichung $a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\, r\, \varrho\, \cos w$ bestimmt werden, worin w der Wälzungswinkel des rollenden Kreises ist.

Führt man an dessen Stelle den Winkel $AOB = \varphi = \frac{r}{R} w$ ein, so nimmt der Ausdruck für a die Form an: $a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2 r \varrho \cos \frac{R}{r} \varphi$.

In dem speciellen Fall, dass $r = \varrho$ ist, dass also eine gemeine Epicycloide und Hypocycloide vorliegt, erhält der Radius der aufeinander folgenden Kreise den Wert $a = 2 r \sin \frac{R}{2 r} \varphi$.

§. 3.

Der vorstehende Satz ist ohne jede Voraussetzung über die Grösse der Radien R und r abgeleitet worden; er wird deshalb auch Geltung behalten, wenn einer dieser Radien unendlich gross wird.

Für $R = \infty$ wird der Bogen des ruhenden Kreises zur geraden Linie, und die Epicycloide sowohl als die Hypocycloide gehen in Cycloiden über, welche gleiche Dimension, aber in Bezug auf die Grade entgegengesetzte Lage haben.

Um die Gleichungen dieser Cycloiden von den aufgestellten der Epicycloiden und Hypocycloiden ableiten zu können, transformieren wir die letzteren auf ein dem alten paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in der Entfernung $+ R$ auf der alten y-Achse liegt.

Sie nehmen dann die Formen an:

$$x_1 = R \sin \frac{r}{R} w + r \sin \frac{r}{R} w - \varrho \sin w \cos \frac{r}{R} w$$
$$- \varrho \cos w \sin \frac{r}{R} w.$$

$$y_1 = R\left(\cos\frac{r}{R}w - 1\right) + r\cos\frac{r}{R}w + \varrho \sin w \sin\frac{r}{R}w - \varrho \cos w \cos\frac{r}{R}w.$$

$$x_2 = R\sin\frac{r}{R}w - r\sin\frac{r}{R}w - \varrho \sin w \cos\frac{r}{R}w + \varrho \cos w \sin\frac{r}{R}w.$$

$$y_2 = R\left(\cos\frac{r}{R}w - 1\right) - r\cos\frac{r}{R}w + \varrho \sin w \sin\frac{r}{R}w + \varrho \cos w \cos\frac{r}{R}w.$$

Setzt man nun $R = \infty$, so wird $\measuredangle \frac{r}{R}w = 0$, also $\sin\frac{r}{R}w = 0$ und $\cos\frac{r}{R}w = 1$; das Glied $R\sin\frac{r}{R}w = \frac{\sin\frac{r}{R}w}{\frac{1}{R}}$ nimmt die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, der wahre Wert desselben ist also

$$\frac{d\sin\frac{r}{R}w}{\frac{dR}{d\frac{1}{R}}} = rw;$$

dieselbe unbestimmte Form nimmt das Glied $R\left(\cos\frac{r}{R}w - 1\right)$ an, der wahre Wert desselben ist Null. Wir erhalten somit als Gleichungen der Cycloiden:

$x_1 = rw - \varrho \sin w$ $\qquad$ $x_2 = rw - \varrho \sin w$

$y_1 = r - \varrho \cos w$ $\qquad$ $y_2 = -(r - \varrho \cos w)$,

welche in dem Fall $\varrho = r$, d. h. in dem Fall der gemeinen Cycloide die Formen:

$x_1 = r\,(w - \sin w)$ $\qquad$ $x_2 = r\,(w - \sin w)$
$y_1 = r\,(1 - \cos w)$ $\qquad$ $y_2 = -\,r\,(1 - \cos w)$
annehmen.

Auch diese Cycloiden lassen sich als Einhüllende eines beweglichen Kreises betrachten, dessen Mittelpunkt in der Entfernung $r\,w$ vom Anfangspunkt auf der festen Graden, welche x-Achse ist, liegt, und dessen Radius durch die Gleichung:
$a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\,r\,\varrho\,\cos w$ bestimmt ist.

In der That gelangt man zu den obigen Werten von x und y, wenn man dieselben aus der Gleichung des beweglichen Kreises:
$(x - r\,w)^2 + y^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\,r\,\varrho\,\cos w$
und ihrem Differentialquotienten nach w :

$$x = r\,w - \varrho\,\sin w$$

berechnet.

Doch wird dieser Satz darum zu keiner einfachen Konstruktion führen, weil immer die Schwierigkeit bleibt, das Stück einer graden Linie zu bestimmen, welches mit einem Kreisbogen gleiche Länge hat.

§. 4.

Wird im Gegenteil $r = \infty$, so geht der rollende Kreis in eine Grade über und die Epicycloide sowohl als die Hypocycloide werden in dem speciellen Fall $\varrho = r$ zu Kreisevolventen, welche ganz aufeinander fallen.

Dieselben lassen sich als die Einhüllende eines beweglichen Kreises betrachten, dessen Mittelpunkt auf dem ruhenden Kreis liegt. Der Ausdruck für den Radius

dieses Kreises, $a = 2\,r \sin \frac{r}{2\,R}\,\varphi = \frac{\sin \frac{R}{2\,r}\,\varphi}{\frac{1}{2\,r}}$,

nimmt die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; der wahre Wert desselben ist $R\,\varphi$.

Die Gleichung des beweglichen Kreises wird dadurch: $(x - R\cos\varphi)^2 + (y - R\sin\varphi)^2 = R^2\,\varphi^2$, deren erster Differentialquotient nach φ :

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = R\,\varphi$$

ist. Berechnet man aus diesen Gleichungen x und y, so finden sich die bekannten Coordinatenwerte eines Punktes der Kreisevolvente:

$$x_1 = x_2 = R\,(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi),$$
$$y_1 = y_2 = R\,(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Die aufeinanderfolgenden unendlich nahen Kreise berühren sich somit.

Die Anwendung dieses Satzes zur Ableitung einer genauen Konstruktion scheitert an der schon bei der Cycloide aufgetretenen Schwierigkeit, einen Kreisbogen auf konstruktivem Weg zu rektificieren.

Ein annähernd richtiges Verfahren lässt sich aber auf den soeben erwähnten Umstand gründen, dass von den unendlich nahen Kreisen, deren Einhüllende die Kreisevolvente ist, jeder den vorhergehenden berührt und zwar, wie sich aus der Lage und Grösse der Kreise leicht ergiebt, von innen.

Man nehme auf der Peripherie des Grundkreises beliebig viele Punkte in nicht zu grosser Entfernung von einander an. Um einen derselben, den ersten, schlage man einen Kreis mit möglichst kleinem Halbmesser; der Radius, welcher zu einem späteren Punkt,

dem n^{ten} gehört, ist dann immer bestimmt als der Abschnitt, welchen der Kreis um den $(n-1)^{\text{ten}}$ Punkt auf der Verbindungslinie des n^{ten} mit dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Punkt macht.

Es ist leicht einzusehen, dass man auf diese Weise beliebig viele Windungen der Kreisevolvente erhalten kann.

§. 5.

Der in §. 2 abgeleitete Satz über Epicycloiden und Hypocycloiden führt in allen den Fällen zu Konstruktionen dieser Curven, in welchen der specielle Wert des Verhältnisses $\frac{r}{R}$ eine geometrische Darstellung des Radius:

$$a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\, r\, \varrho\, \cos \frac{R}{r}\, \varphi \text{ resp. } a = 2\, r \sin \frac{R}{2\, r}\, \varphi,$$

wenn es sich um gemeine Epicycloiden und Hypocycloiden handelt, zulässt.

Beschränken wir uns zunächst auf Curven der zuletzt bezeichneten Art, so tritt der erste dieser Fälle unter der einfachsten Voraussetzung $r = R$ ein.

Der Wert des zu einem beliebigen Winkel φ gehörigen Radius (Fig. 4.) wird $a = 2\, R \sin {}^1/_2\, \varphi$; da $AB = 2\, R$, $\sphericalangle\, ABM = {}^1/_2\, \varphi$ als Peripheriewinkel ist, so ist AM der zu dem Punkt M gehörige Radius.

Die dem Verhältnis $r = R$ entsprechenden zusammengehörigen Epicycloiden und Hypocycloiden bilden somit die Einhüllende der Kreise, deren Centren auf der Peripherie des ruhenden Kreises liegen und welche alle durch einen festen Punkt A dieser Peripherie gehen. Die Gleichungen der Epicycloide nehmen in diesem Fall die Form an:

$x = 2R \sin w - R \sin 2w$, $y = 2R \cos w - R \cos 2w$ oder, wenn man das Coordinatensystem parallel zu sich selbst in den Punkt $x = o$, $y = +R$ der y-Achse verschiebt:

$x = 2R \sin w - R \sin 2w$, $y = 2R \cos w - 2R \cos^2 w$

Die Elimination des Winkels w führt zu der direkten Relation zwischen x und y:

$$(x^2 + y^2 + 2Ry)^2 = 4R^2 (x^2 + y^2).$$

Dieselbe stellt eine Cardioide dar, in welche die Epicycloide bekanntlich für $r = R$ übergeht.

Die Gleichungen der Hypocycloide werden: $x = 0$, $y = +R$; dieselbe reduciert sich also auf den festen Punkt A.

Da die Peripherie des mit dem Radius R beschriebenen Kreises alle Sehnen halbiert, welche man in einem mit dem Halbmesser $2R$ konstruierten, den ersten Kreis in A berührenden Kreis von diesem Punkt aus ziehen kann, so lässt sich der vorstehende Satz auch wie folgt aussprechen.

Die Cardioide ist die Einhüllende aller der Kreise, welche über den von einem Punkt ausgehenden Sehnen eines gegebenen Kreises beschrieben werden können.

In einem zweiten Fall sei $2r = R$. Der Radius a erhält dann den Wert $a = R \sin \varphi$ und ist somit gleich der Abscisse des zugehörigen Peripheriepunktes.

Die dem Verhältnis $2r = R$ entsprechenden zusammengehörigen Epicycloiden und Hypocycloiden bilden somit die Einhüllende der Kreise, deren Mittelpunkte auf der Peripherie des ruhenden Kreises liegen, und welche sämtlich einen festen Durchmesser des Kreises, die y-Achse, berühren.

Die Gleichungen der Epicycloide nehmen in diesem Fall, wenn man den Winkel $\varphi = \frac{w}{2}$ einführt, die Gestalt:

$$x = 2\,R\,\sin^3\varphi \qquad y = R\,\cos\varphi\,(2\,\sin^2\varphi + 1)$$

an; aus denselben lässt sich die Beziehung

$$(x^2 + y^2 - R^2)^3 = \frac{27}{4}\,R^4\,x^2$$

zwischen x und y ableiten.

Die Gleichungen der Hypocycloide werden $x = 0$, $y = R\cos\varphi$; dieselbe wird von dem festen Durchmesser des ruhenden Kreises gebildet.

Ist $R = 4\,r$, so wird der Radius $a = \frac{R}{2}\,\sin\,2\,\varphi$ $= R\,\sin\varphi\,\cos\varphi$ Projiciert man den Peripheriepunkt M des ruhenden Kreises (Fig. 5.) auf die y-Achse, M' auf die in M gezogene Tangente des Kreises, so ist MM'' $= M'M\cos\varphi = R\,\sin\varphi\,\cos\varphi = a$. Die Epicycloiden und Hypocycloiden, welche der Vorraussetzung $R = 4\,r$ entsprechen, bilden also die Einhüllende der Kreise, deren Mittelpunkte auf der Peripherie des ruhenden Kreises liegen und deren Radien auf die angegebene Weise bestimmt sind.

Die Gleichungen der Epicycloide werden, wenn $\varphi = \frac{1}{4}\,w$ ist:

$$x = \frac{1}{4}\,R\,(5\,\sin\varphi - \sin 5\varphi),\ y = \frac{1}{4}\,R\,(5\cos\varphi - \cos 5\varphi),$$

die der Hypocycloide:

$$x = R\,\sin^3\varphi, \qquad y = R\,\cos^3\varphi.$$

Aus diesen Werten findet man die Gleichung $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$ der sogenannten Astroide, welche sich auch in der rationalen Form:

$$(x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27\,R^2\,x^2\,y^2 = 0$$

schreiben lässt.

Zu derselben Hypocycloide gelangt man auch in dem Fall, dass $r = \frac{3}{4}\,R$ ist, da bekanntlich die Hypocycloide (r, R) identisch ist mit der Hypocycloide $(R - r, R)$ oder mit der Epicycloide $(r - R, R)$ jenachdem $r \gtrless R$ ist.

§. 6.

Handelt es sich darum, gedehnte oder verschlungene Epicycloiden und Hypocycloiden als Einhüllende von Kreisen zu konstruieren, so hat man für den Radius derselben den allgemeinen Ausdruck:

$$a^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\,r\,\varrho\,\cos\frac{R}{r}\,\varphi$$

in Anwendung zu bringen.

Setzen wir zunächst wieder $r = R$ voraus, so wird die obige Gleichung $a^2 = R^2 + \varrho^2 - 2\,R\,\varrho\,\cos\varphi$. Es ist somit der Radius a (Fig. 6.) die dritte Seite eines Dreiecks, dessen andere Seiten die Längen R und ϱ haben und den Winkel φ einschliessen. Trägt man also ϱ von O aus nach C auf der y-Achse ab, so ist MC der zu dem Winkel φ gehörige Radius.

Die dem Verhältnis $r = R$ entsprechenden gedehnten oder verschlungenen Epicycloiden und Hypocycloiden bilden somit die Einhüllende der Kreise, deren Mittelpunkte auf der Peripherie des festen Kreises liegen, und welche sämtlich durch einen festen Punkt C gehen, dessen Entfernung vom Mittelpunkt des ruhenden Kreises gleich ϱ ist. Die Gleichungen der Epicycloide nehmen in diesem Fall die Form:

$x = 2R \sin w - \varrho \sin 2w$, $y = 2R \cos w - \varrho \cos 2w$ an. Ist speciell $\varrho = 2R$, so führt die Elimination des Winkels w zu der Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 12 R^2 (x^2 + y^2) + 16 R^3 y = 0.$$

Die Gleichungen der Hypocycloide werden $x = 0$, $y = \varrho$; diese reduciert sich also auf den festen Punkt C.

Unsere zweite Voraussetzung war $2r = R$. Die den Radius a bestimmende Gleichung nimmt in diesem Fall die Form $a^2 = \frac{R^2}{4} + \varrho^2 - R\varrho \cos 2\varphi$ an; durch dieselbe wird a als dritte Seite eines Dreiecks bestimmt, dessen andere Seiten die Längen $\frac{R}{2}$ und ϱ haben und den Winkel 2φ einschliessen. (Fig. 7.) Um a zu konstruieren beschreibe man um den Anfangspunkt O einen zweiten Kreis mit dem Halbmesser $\frac{R}{2}$, schlage den zu einem beliebigen Punkt M in der Peripherie des ruhenden Kreises gehörigen Bogen noch einmal nach B hin ab und verbinde B mit O; es ist dann CD der gesuchte Radius a, wenn OC gleich der gegebenen Strecke ϱ ist.

Bei der praktischen Ausführung dieser Konstruktion empfiehlt es sich, die Peripherie des grösseren der beiden Kreise in eine beliebige, aber grade Anzahl gleicher Teile zu teilen und jeden zweiten der Teilpunkte mit dem Centrum zu verbinden; die Peripherie des kleineren Kreises wird dadurch in halb soviel gleiche Teile geteilt als die des grösseren. Bezeichnet man dann die Teilpunkte des kleineren Kreises noch einander mit 1, 2, 3 . . . n, die des grösseren mit 1, 2, 3 . . . n, 1, 2, 3 . . . n, so ist der Radius, welcher zu einem beliebigen m^{ten} Teilpunkt des grösseren Kreises gehört, gleich der

Entfernung des ebenfalls mit m bezeichneten Teilpunktes des kleineren Kreises von dem festen Punkt C.

Die Gleichungen der Epicycloide werden, wenn man $\varphi = \frac{w}{2}$ setzt:

$$x = \frac{3}{2} R \sin \varphi - \varrho \sin 3\varphi, \; y = \frac{3}{2} R \cos \varphi - \varrho \cos 3\varphi;$$

die der Hypocycloide:

$$x = \frac{R - 2\varrho}{2} \sin \varphi$$

$$y = \frac{R + 2\varrho}{2} \cos \varphi.$$

Die letztere ist somit eine Ellipse, deren Gleichung: $\frac{x^2}{\left(\frac{R-2\varrho}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{R+2\varrho}{2}\right)^2} = 1$ ist, und deren Halbachsen die Werte $\frac{R - 2\varphi}{2}$ und $\frac{R + 2\varrho}{2}$ haben.

In einem dritten Fall sei $2R = r$. Der Radius a erhält dann den Wert: $a^2 = 4R^2 + \varrho^2 - 4R\varrho \cos \frac{\varphi}{2}$; er ist also die dritte Seite eines Dreiecks, dessen andere Seiten die Längen $2R$ und ϱ haben und den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ einschliessen. (Fig. 8.) Der zu dem Peripheriepunkt M des ruhenden Kreises gehörige Radius ist also die Strecke BC, wenn $AC = \varrho$ gemacht ist.

Die praktische Ausführung der Konstruktion wird auch in diesem Fall einfach. Man schlage um den Punkt A als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius ϱ. Teilt man den ersten Kreis in beliebig viele Teile 1, 2, 3 . . n, verbindet die Teilpunkte mit A und bezeichnet die Durchschnittspunkte der Verbindungs-

linien mit dem Kreis um A ebenfalls der Reihe nach mit 1, 2, 3 . . n, so ist der zu einem beliebigen Teilpunkt des ruhenden Kreises gehörige Radius gleich der Entfernung des gleichbezeichneten Teilpunktes des zweiten Kreises von B.

Man sieht leicht, dass man von dem zweiten Kreis nur den über der Tangente am ruhenden Kreis in A beschriebenen Halbkreis braucht.

Die Gleichungen der Epicycloide werden

$$x = 3\,R\,\sin 2\,w - \varrho\,\sin 3\,w$$
$$y = 3\,R\,\cos 2\,w - \varrho\,\cos 3\,w,$$

die der Hypocycloide:

$$x = -\,R\,\sin 2\,w + \varrho\,\sin w$$
$$y = -\,R\,\cos 2\,w + \varrho\,\cos w$$

und also für $\varrho = R$:

$$x = R\,(\sin w - \sin 2\,w)$$
$$y = R\,(\cos w - \cos 2\,w),$$

woraus sich durch Elimination von w die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^3 - 3\,R^2\,(x^2 + y^2) + 2\,R^3\,y = 0$$

ergiebt.

Die Hypocycloiden stimmen überein mit den früher betrachteten Epicycloiden, deren Radienverhältnis $\frac{R}{r} = 1$ ist.

§. 7.

Den Schluss dieser Arbeit mag eine Verallgemeinerung des in §. 4 abgeleiteten Satzes über die Kreisevolvente bilden.

Wir haben in §. 1 gesehen, dass die innere und äussere Rolllinie, welche durch das Rollen einer beliebigen Curve auf den beiden Seiten einer anderen Curve ent-

stehen, die Einhüllende einer Schar von Kreisen sind, deren Mittelpunkte auf der ruhenden Curve liegen und deren Radien die jedesmalige Entfernung dieser Mittelpunkte von dem beschreibenden Punkt sind. Von den beiden Schnittpunkten zweier unendlich nahen Kreise gehört der eine der äusseren, der andere der inneren Rolllinie an.

Wird nun die rollende Curve zur graden Linie, so fallen äussere und innere Rolllinie zusammen, weil sich bei der Berührung einer Graden mit einer Curve äussere und innere Berührung nicht unterscheiden lassen. Es müssen aus diesem Grund auch die beiden Durchschnittspunkte zweier unendlich nahen Kreise der Schar, deren Einhüllende die Rolllinie ist, zusammen fallen, d. h. die Kreise müssen sich berühren und zwar von innen, da die Radien der Kreise im allgemeinen endliche Längen haben, während ihre Mittelpunkte sich unendlich nah liegen. Die Curven, welche durch das Rollen einer Graden auf einer beliebigen Curve entstehen, sind aber bekanntlich Evolventen der letzteren.

Es gilt somit ganz allgemein der Satz, dass die Einhüllende einer Schar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Curve liegen und von welchen je zwei aufeinander folgende sich von innen berühren, eine Evolvente der ersten Curve ist.

Man wird zu verschiedenen Evolventen derselben Curve gelangen, wenn man verschiedene Punkte derselben als Mittelpunkte des ersten Kreises wählt und dem Radius dieses ersten Kreises verschiedene Längen giebt.

Aus diesem Satz lässt sich, wie es in §. 4 für die Kreisevolvente geschehen ist, eine hinreichend ge-

naue Darstellung jeder Evolvente ableiten. Das Verfahren ist genau das dort angegebene; man hat nur an die Stelle des Kreises die Curve zu setzen, deren Evolventen man sucht.

Geht man von einer Cycloide aus, so kann man eine derselben genau gleiche Cycloide als Evolvente erhalten; eine Cardioide liefert wieder eine Cardioide.

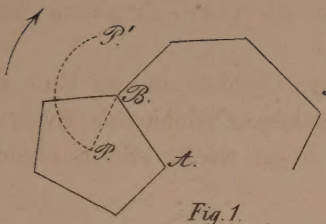

Fig. 1.

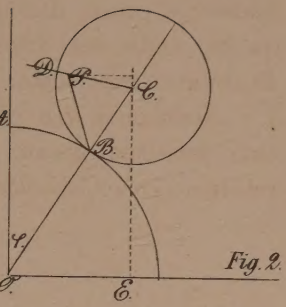

Fig. 2.

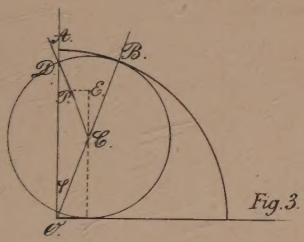

Fig. 3.

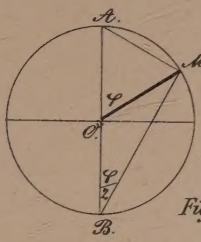

Fig. 4.

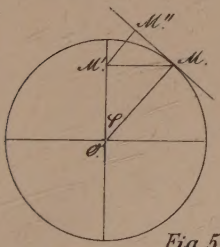

Fig. 5.

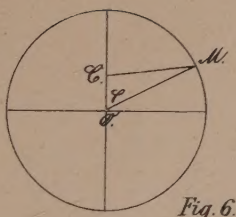

Fig. 6.

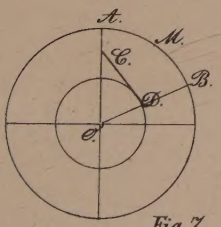

Fig. 7.

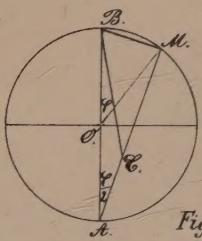

Fig. 8.